

Cursus Renforcé

Feuille 1.

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{e^x} dx, \quad I_2 = \int_2^3 \ln(x^2-1) dx, \quad I_3 = \int_1^5 \sqrt{2x-1} dx$$
$$I_4 = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25-3x}}, \quad I_5 = \int_1^2 \frac{dx}{x(1+\ln x)}, \quad I_6 = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Exercice 2 : Si P est un polynôme de degré 3, vérifier la formule des trois niveaux:

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b) \right]$$

Exercice 3 : Calculer les primitives suivantes.

$$\int \frac{2x-1}{x^2+x+1} dx, \quad \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx, \quad \int \sqrt{e^x+1} dx,$$

Exercice 4 : Calculer

$$I_1 = \int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{4+\sin \theta}, \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{4+\sin \theta} d\theta.$$

Exercice 5 : Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = \lim \left(n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + n^2} \right)$$
$$\ln 2 = \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$$

Exercice 6 : (Intégrales impropres)

1. Etudier la convergence des intégrales suivantes

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}, \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \int_0^1 x^\alpha \ln x dx, \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}.$$

2. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes. Si oui, les calculer.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + x}}, \int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^5}} dx, \int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}, \int_1^\infty x^\alpha \ln x dx, \int_0^\infty \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

Exercice 7 : Etudier la convergence des intégrales suivantes

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx, \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx, \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} dx, \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx.$$