UNIVERSITÉ VERSAILLES ST-QUENTIN **2007**

Cursus Renforcé

Feuille 2.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants:

$$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \quad , \quad u_n = \frac{n!}{a^n} \quad , \quad u_n = \frac{1}{n^2-\cos(1/n)} \quad , \quad u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad , \quad u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$u_n = \arctan\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \arctan\sqrt{1-\frac{1}{n}} \quad , \quad u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{3}{n}}} \quad , \quad u_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

$$u_n = \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} \quad , \quad u_n = n\log\cos n^{-\alpha}\,.$$

Exercice 2 : Montrer que si la série à termes positifs $\sum u_n$ converge et si la suite u_n est décroissante, alors $\lim nu_n = 0$.

En utilisant la suite u_n définie par $u_n = p^{-2}$ si $n = 2^p$ avec p entier quelconque et $u_n = 0$ sinon, montrer que la série converge sans que nu_n admette 0 pour limite.

Exercice 3 : Soit u_n une série à termes positifs. Comparer la nature des séries de terme géneraux u_n et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Exercice 4 : *Recherche d'un équivalent de S_n par comparaison avec une intégrale*

1. a) Soit $\alpha > 0$. Rappeler la méthode pour trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$ quand $n \to \infty$. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.
2. Soit f une fonction positive décroissante sur $[1+\infty[$. On pose

$$\phi(n) = \sum_{p=1}^{n} f(p) - \int_1^n f(x)\,dx\,.$$

a) Montrer que la suite $(\phi(n))$ est convergente.

b) Soit la série $g(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha+1}}, \alpha > 0$. Montrer que $\lim_{\alpha\to 0} \alpha g(\alpha) = 1$.

c) Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha}, 0 < \alpha < 1$.

d) Montrer que la suite $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln n$ converge (Somme = constante d'Euler).

Exercice 5 : Montrer que la série de terme général $u_n = \arctan\frac{1}{n^2+n+1}$ est convergente et calculer sa somme.