Cursus Renforcé

Devoir Maison 2.

Exercice 1 : On se propose de calculer une des intégrales impropres convergentes rencontrées au DS1, c'est-à-dire

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx\,.$$

On pose

$$I(\varepsilon, A) = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}\,.$$

1) Montrer que

$$I(\varepsilon, A) = \int_A^{2A} f(x)\, dx - \int_\varepsilon^{2\varepsilon} f(x)\, dx\,.$$

2) Montrer que

$$(1 - e^{-A}) \ln 2 < \int_A^{2A} f(x)\, dx < \ln 2\,.$$

3) En déduire que $I = \ln 2$.

Exercice 2 : Soit $0 < a < b$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

pour tout $n \geq 0$.

- Montrer que la suite (V_n) définie par

$$V_n = \ln\left(n^{b-a} u_n\right)$$

a une limite. (On pourra montrer que la série de terme général $v_n = V_{n+1} - V_n$ est convergente).

- En déduire les valeurs de a et b telles que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 3 : Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y' + xy + x = 0\,.$$

Exercice 4 : Discuter suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' - (m+1)y' + my = e^x\,.$$