

Université de Versailles-Saint-Quentin
MATHÉMATIQUES
Cursus renforcé

Alain Rouault

Contents

1.1	Construction de l'intégrale de Riemann	4
1.1.1	Intégrale des fonctions en escalier	4
1.1.2	Intégrabilité	5
	Sommes de Riemann	7
1.2	Primitives et intégrales	8
1.3	Calcul de primitives et d'intégrales	9
1.3.1	Primitives usuelles	9
1.3.2	Changement de variable	10
1.3.3	Intégration par parties	11
1.3.4	Intégration des fonctions rationnelles	12
	Exemples de calculs de primitives de fractions rationnelles	12
	Décomposition en éléments simples	13
	Un exemple complet	13
2.1	Définitions et Propriétés	14
2.2	Comparaison séries-intégrales	14
2.3	Critères de convergence	15
3.1	Intégrale généralisée sur un intervalle borné non fermé	16
3.1.1	Intégrale généralisée de fonctions positives	16
3.1.2	Convergence absolue	17
3.2	Intégrale généralisée sur un intervalle non borné	17
3.2.1	Intégrale généralisée de fonctions positives	17
3.1	Equations différentielles du premier ordre	18
3.1.1	Equations à variables séparées	19
	Intégration d'une équation homogène	20
3.1.2	Equations différentielles linéaires du premier ordre	20
3.2	Equations différentielles linéaires du second ordre	23
3.2.1	Etude de l'équation sans second membre (dite homogène)	23
3.2.2	Equation avec second membre	25
3.3	Systèmes différentiels linéaires du Premier Ordre	27
3.3.1	Cas où A est diagonalisable	27
3.3.2	Cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$	27
3.3.3	Cas où A est triangulable et non diagonalisable	28
3.3.4	Cas d'un système avec second membre	29
4.1	Séries à termes quelconques	30
4.2	Intégrales semi-convergentes	31

Calcul Intégral

1.1 Construction de l'intégrale de Riemann

1.1.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 1.1.1 Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie $x_0, \dots, x_n$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$ telles que chaque terme de σ' figure dans σ , on dit que σ est plus fine que σ' .

Définition 1.1.2 Soit $[a, b]$ un intervalle fini. Une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$. Une telle subdivision est dite associée à f .

Remarquons que σ n'est pas déterminée par f . Toute subdivision plus fine que σ est encore associée à f .

Proposition 1.1.3 1. Toute fonction en escalier est bornée.

2. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont en escalier et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $\lambda f, |f|, f + g, fg$ sont en escalier.

Définition 1.1.4 Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et pour $i = 0, \dots, n-1$ soit c_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(x)dx$ la quantité

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_i c_i(x_{i+1} - x_i)$$

On montre que la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie. Si $f \geq 0$ cette intégrale est égale à l'aire de la région

$$\mathcal{E} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Si f est de signe quelconque, c'est la différence des aires de

$$\mathcal{E}^+ = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

et de

$$\mathcal{E}^- = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\};$$

Proposition 1.1.5 1. Linéarité

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

2. Relation de Chasles : Si $a < c < b$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. *Positivité* Si $f(x) \geq 0$ pour $x \in [a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

4. *Conséquence*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

1.1.2 Intégrabilité

Définition 1.1.6 On dit que f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si f satisfait l'une des deux conditions équivalentes suivantes:

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions en escalier g et h telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et

$$0 \leq \int_a^b (h(x) - g(x))dx \leq \varepsilon$$

2. Pour tout $n \geq 1$ il existe deux fonctions en escalier g_n et h_n telles que $g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et

$$0 \leq \int_a^b (h_n(x) - g_n(x))dx \leq \frac{1}{n}$$

On montre alors que

$$\lim_n \int_a^b g_n(x)dx = \lim_n \int_a^b h_n(x)dx$$

On note $\int_a^b f(x)dx$ cette limite commune. On peut choisir g_n suite croissante et h_n suite décroissante; dans ce cas les deux suites $u_n = \int_a^b g_n(x)dx$ et $v_n = \int_a^b h_n(x)dx$ sont adjacentes. Les propriétés de la Proposition 1.1.5 sont vraies pour les fonctions intégrables Riemann.

Proposition 1.1.7 • Une fonction R -intégrable est bornée.

- Une fonction monotone est R -intégrable.
- Une fonction continue est R -intégrable.
- Une fonction (bornée!) continue sauf en un nombre fini de points, ou monotone sur chaque sous-intervalle d'une partition finie de $[a, b]$, est R -intégrable.

Preuve: 2) Supposons par exemple que f soit croissante. On choisit une subdivision $a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b$ et on définit deux fonctions g_n et h_n par morceaux $g_n(x) = f(x_{i-1})$ lorsque $x \in [x_{i-1}, x_i]$ et $h_n(x) = f(x_i)$. On finit avec $g_n(b) = h_n(b) = f(b)$. On a clairement $g_n \leq f \leq h_n$ et

$$\int_a^b (h_n - g_n)(t)dt = \sum_i [f(x_i) - f(x_{i-1})] (x_i - x_{i-1}).$$

Posons $\delta_n = \max(x_i - x_{i-1})$ (pas de la subdivision). La quantité précédente est positive et on a la majoration :

$$\int_a^b (h_n - g_n)(t)dt \leq \delta_n \sum_i [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \delta_n (f(b) - f(a)),$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, dès que $\delta_n \rightarrow 0$.

3) On a besoin d'un lemme sur la continuité uniforme.

Lemme 1.1.8 Si f est continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ alors l'oscillation définie par

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(x')|; |x - x'| \leq \delta\}$$

vérifie

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0.$$

Ce lemme étant admis, on prend une subdivision de pas inférieur ou égal à δ et on pose $m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ et $M_i = \sup\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$. On définit g et h par morceaux. Lorsque $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on pose $g(x) = m_i$ et $h(x) = M_i$. Comme les quantités M_i, m_i sont atteintes par f , on a $M_i - m_i \leq \omega(f, \delta)$ et

$$0 \leq \int h - \int g = \sum_i (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \omega(f, \delta) \sum_i (x_i - x_{i-1}) = (b - a)\omega(f, \delta).$$

Pour montrer le lemme, on commence par observer que $\omega(f, \delta)$ est une fonction croissante de δ . Elle a donc une limite quand δ tend vers 0. On montre par l'absurde que la limite est nulle. Si la limite était non nulle, on pourrait trouver un $\varepsilon > 0$ et une paire de suites (x_n, x'_n) telle que $|x_n - x'_n| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$. De la suite x_n on extrairait une suite x_{n_k} convergente. La suite x'_{n_k} convergerait vers la même limite donc par continuité $f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})$ tendrait vers 0, d'où la contradiction. ■

Cette définition de l'intégrale est inadaptée à la plupart des calculs. On peut prendre l'exemple de $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$. L'aire du triangle est connue et vaut 1/2 (on ne s'amuse pas à prendre des fonctions en escalier).

Théorème 1.1.9 (Théorèmes de la moyenne) Soit f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

2. Soit g intégrable positive sur $[a, b]$. Alors il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(x_1) \int_a^b g(t)dt.$$

Démontrons le 1). Comme elle est continue, la fonction f possède un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$ et on a

$$m \leq f(x) \leq M$$

En intégrant et en divisant par $(b - a)$, on obtient

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

Or, ces bornes sont atteintes par f qui possède la propriété de la valeur intermédiaire, d'où l'existence de x_0 . Nous démontrerons le 2) plus loin.

Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, σ une subdivision et pour tout $i = 0, \dots, n-1$ soit ξ_i un point quelconque de $[x_i, x_{i+1}]$. On pose alors

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

On dit que S est une somme de Riemann de f relative à σ (elle dépend de f, σ et des ξ_i). On rappelle que le pas de σ est la quantité

$$\delta(\sigma) = \max\{x_{i+1} - x_i ; 0 \leq i \leq n\}$$

Théorème 1.1.10 Soit f R -intégrable et S_n une suite de sommes de Riemann de f relatives à des subdivisions σ_n telles que $\lim_n \delta(\sigma_n) = 0$. Alors

$$\lim_n S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Corollaire 1.1.11 Si f est R -intégrable sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \quad (1.1.1)$$

Exemples

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\ \lim_n \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{n+k} &= \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} [2^{3/2} - 1]. \end{aligned}$$

Méthode des rectangles On veut estimer l'erreur commise en approchant l'intégrale par la somme de Riemann

$$S_n^R := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{avec} \quad x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

Si la fonction f est croissante, on a

$$S_n^R \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_n^R + \frac{f(b) - f(a)}{n}(b-a).$$

Cette majoration est assez mauvaise du point de vue numérique: il faut prendre $n = 1000$ pour avoir une erreur de l'ordre du millièmes.

Proposition 1.1.12 Supposons f dérivable, à dérivée bornée par M_1 . Alors la quantité

$$\varepsilon_n^R := \left| \int_a^b f(x)dx - S_n^R \right|$$

vérifie

$$\varepsilon_n \leq \frac{(b-a)^2 M_1}{2n}.$$

Remarque 1.1.13 (Méthode des trapèzes) Si on pose

$$S_n^T = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} (x_{k+1} - x_k) \quad \text{et} \quad \varepsilon_n^T = \left| \int_a^b f(x) dx - S_n^T \right|$$

alors, si f est deux fois dérivable à dérivée seconde bornée par M_2 , on a

$$\varepsilon_n^T \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}.$$

1.2 Primitives et intégrales

Soit f définie sur $[a, b]$ et intégrable

Définition 1.2.1 Soit f et F définies sur un intervalle I ouvert. On dit que F est une primitive de f si F est dérivable et si sa fonction dérivée est f .

Proposition 1.2.2 Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ne diffèrent que par une constante.

Se démontre grâce au théorème des accroissements finis: $F - G$ a une dérivée nulle donc, pour tout x et tout a dans I on a

$$(F - G)(x) - (F - G)(a) = (-G)'(\xi)$$

où ξ est un point intermédiaire entre x et a .

Théorème 1.2.3 Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. On pose et soit

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$. En particulier, toute fonction continue possède une primitive.

Soit $x_0 \in I$. On peut écrire (relation de Chasles)

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt, \quad (1.2.2)$$

d'où

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt, \quad (1.2.3)$$

(si $x > x_0$ les deux termes du second membre sont positifs, si $x < x_0$ ils sont négatifs).

Comme f est continue en x_0 , on a

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha) (\forall t \in I) |t - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

et donc, dès que $|x - x_0| \leq \alpha$ en reportant dans (1.2.3), on obtient

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Version affaiblie Si f est R-intégrable et si x_0 est un point de continuité de f alors, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Intérêt de la primitive : D'après le théorème précédent, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f , et d'après la proposition, toute primitive de f est égale à F , à une constante près. Donc, si $\tilde{F}$ est une primitive quelconque de f , alors $\tilde{F} = F + c$, et $\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Ainsi, la connaissance d'une primitive quelconque F d'une fonction f sur un intervalle I permet de calculer l'intégrale de f sur n'importe quel intervalle $[a; b] \subset I$, en appliquant la formule $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Ainsi, bien que cela soit possible, on n'utilise dans la pratique quasiment jamais la définition de l'intégrale de Riemann en terme de sommes de Darboux, pour la calculer. Sauf exceptions, on cherchera toujours une primitive de f par les méthodes qui seront développées dans la suite, pour appliquer la formule ci-dessus.

1.3 Calcul de primitives et d'intégrales

1.3.1 Primitives usuelles

$$\begin{aligned}
 \int x^m dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{R} \text{ sauf } m = -1 \\
 \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| \quad \text{attention!} \\
 \int e^x dx &= e^x \\
 \int \sin x dx &= -\cos x \\
 \int \cos x dx &= \sin x \\
 \int \sinh x dx &= \cosh x \\
 \int \cosh x dx &= \sinh x \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x \quad \text{attention!} \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \arg \cosh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right) \quad \text{sur }]1, \infty[\\
 &= -\arg \cosh(-x) = -\ln \left(-x + \sqrt{x^2-1} \right) \quad \text{sur }]-\infty, -1[\\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \arg \sinh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) \\
 \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x \quad \text{attention!} \\
 \int \tan x dx &= -\ln |\cos x| \quad \text{attention!} \\
 \int \tanh x dx &= \ln \cosh x
 \end{aligned}$$

Remarquons aussi que

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \arg \tanh x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{sur }]-1, 1[\quad (1.3.4)$$

$$= \arg \tanh \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{sur }]-\infty, -1[\cup]1, \infty[\quad (1.3.5)$$

1.3.2 Changement de variable

Dans un calcul d'intégrale dont x est la variable d'intégration, on peut avoir envie

- soit de poser $x = \varphi(t)$
- soit de poser $y = \psi(x)$.

Théorème 1.3.1 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ avec $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$$

Pour le prouver, il suffit de considérer les deux membres comme fonctions de β , continues, dérivables, de même dérivée et s'annulant en α .

Remarquons qu'on n'a pas supposé φ injective. On n'a pas supposé non plus que $[a, b]$ est l'image par φ de $[\alpha, \beta]$; l'essentiel est que f soit continue sur un intervalle contenant l'image par φ de $[\alpha, \beta]$.

Parfois on utilise une version inversée de cette formule.

Théorème 1.3.2 Soit f continue sur $[a, b]$. On suppose que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est une bijection de $[a, b]$ sur son image. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f \circ \psi^{-1}(y) \frac{1}{\psi' \circ \psi^{-1}(y)} dy$$

On écrit $y = \psi(x)$ puis $dy = \psi'(x) dx = \psi' \circ \psi^{-1}(y) dy$

Preuve de la deuxième formule de la moyenne Essayons de transformer le premier membre. Si $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, alors

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t) g \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$$

La fonction G définie par $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ est continue, strictement croissante sur $]a, b[$. On pose

$$u(x) = a + \frac{G(x)}{G(b)}(b - a)$$

Elle a les mêmes régularités que G , avec $u(a) = a$, $u(b) = b$. On a $u' = \frac{(b-a)}{G(b)} g$. Si on pose $y = u(x)$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g(x) dx &= \int_a^b f \circ u^{-1}(y) g \circ u^{-1}(y) \frac{1}{u' \circ u^{-1}(y)} dy \\ &= \int_a^b f \circ u^{-1}(y) \frac{G(b)}{(b-a)} dy \end{aligned}$$

Il reste à appliquer le premier théorème.

Exemples :

1) Calcul de

$$I = \int_1^2 \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

On pose $y = x^2 + 1$ ce qui donne $dy = 2x dx$ soit $dx = \frac{dy}{2x}$. Si $x = 1, y = 2$ et si $x = 2, y = 5$.
Donc:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{y-1}{y^2} dy = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} dy \\ &= \left[\ln |y| + \frac{1}{y} \right]_2^5 = \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{10} \end{aligned}$$

2) Calcul de

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

On pose $x = \tan \theta$ c'est bijectif, $\theta = \arctan x$, d'où $d\theta = dx/(1+x^2)$ et

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{1+\tan^2 \theta} = \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta d\theta$$

Or $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$ d'où

$$J = \left[\frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

1.3.3 Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, (u' et v' continues), sur l'intervalle $[a, b]$. Alors:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Exemple de base

$$\int_a^b \ln x dx = [x \ln x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{x} dx = [x \ln x - x]_a^b$$

Application: Reste intégral de Lagrange pour la formule de Taylor

Si la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, pour tout $x \in]a, b[$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

En particulier

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

1.3.4 Intégration des fonctions rationnelles

Exemples de calculs de primitives de fractions rationnelles

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{b} \ln |ax+b|$$

Exemple 2: Si on veut calculer $\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$ il faut distinguer 3 cas.

- Si $x^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)$, on écrit

$$\frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{1}{\alpha-\beta} \left[\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} \right]$$

et donc

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{1}{\alpha-\beta} \ln \left| \frac{x-\alpha}{x-\beta} \right|$$

sur tout intervalle ne contenant ni α ni β .

- Si $x^2+bx+c = (x-\alpha)^2$, on a

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = -\frac{1}{x-\alpha}.$$

- Si $b^2-c < 0$, alors

$$x^2+bx+c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + A, \quad A = c - \frac{b^2}{4},$$

et donc

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dy}{y^2+A} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dz}{1+z^2}$$

où on a posé successivement $y = x + \frac{b}{2}$ puis $y = z\sqrt{A}$. On a finalement

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$$

Exemple 3

$$H = \int \frac{2x-1}{x^2+x+1} dx.$$

On commence comme dans l'exemple 2) i.e.

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

et on pose $z = (2x+1)/\sqrt{3}$ d'où

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{z\sqrt{3}-2}{z^2+1} dz = \int \frac{2z}{z^2+1} dz - \frac{4}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{z^2+1} \\ &= \ln(1+z^2) - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan z \end{aligned}$$

et finalement en revenant à x

$$H = \ln(x^2+x+1) - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + Cste.$$

Décomposition en éléments simples

On appelle *élément simple de première espèce* toute fonction rationnelle du type:

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On appelle *élément simple de deuxième espèce* toute fonction rationnelle du type:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad b^2-4ac < 0$$

On montre que toute fonction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose en une somme d'éléments simples et d'un polynôme (sa partie entière).

Décomposition de $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

- Etape 1: Si le degré de P est supérieur ou égal à celui de Q , effectuer la division euclidienne.
- Etape 2: Le degré de P est strictement inférieur à celui de Q . Il y a 3 cas de figure:
 - Le polynôme $Q(X)$ se factorise en produit de facteurs de degré 1 et toutes les racines sont simples:

$$Q(X) = \alpha \prod_{i=1}^n (X - a_i)$$

avec les a_i tous distincts. Alors la fraction se décompose en

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{x - a_i}$$

où les A_i sont des réels non nuls.

- Le polynôme $Q(X)$ a au moins une racine multiple:

$$Q(X) = \alpha \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{m_i}$$

avec les m_i entiers non nuls dont un au moins est supérieur ou égal à 2. On a alors

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_i}{(x - a_i)^k}$$

- Le polynôme $Q(X)$ contient des facteurs irréductibles (de degré 2) de la forme $(aX^2 + bX + c)^k$ avec $b^2 - 4ac < 0$. Un tel facteur engendre une somme du type:

$$\sum_{i=1}^k \frac{A_i X + B_i}{(aX^2 + bX + c)^i}$$

Un exemple complet

Prendre l'exemple du site

<http://www.les-mathematiques.net/>

Séries à termes positifs

2.1 Définitions et Propriétés

Exemples de motivation :

- 1) le paradoxe de Zénon et la série géométrique;
- 2) la série harmonique diverge.

Condition nécessaire de convergence de la série : le terme général tend vers 0.

Série télescopique : $u_n = f(x_n) - f(x_{n-1})$.

Proposition 2.1.1 Une série à termes positifs converge si et seulement si l'ensemble de ses sommes partielles est majoré.

Proposition 2.1.2 Soit 2 séries à termes positifs (Σx_n) et (Σy_n) et λ un réel positif.

1. La série $(\Sigma \lambda x_n)$ est de même nature que la série (Σx_n) et si elles convergent on a

$$\Sigma \lambda x_n = \lambda (\Sigma x_n)$$

2. Si (Σx_n) et (Σy_n) convergent, alors $(\Sigma (x_n + y_n))$ converge et on a :

$$\Sigma (x_n + y_n) = \Sigma x_n + \Sigma y_n$$

Proposition 2.1.3 Soit 2 séries à termes positifs (Σx_n) et (Σy_n) telles qu'il existe N_0 tel que pour tout $n < N_0$, on a $x_n < y_n$.

1. Si Σy_n converge, alors Σx_n converge.
2. Si Σx_n diverge, alors Σy_n diverge.

Corollaire 2.1.4 Soit 2 séries à termes positifs (Σx_n) et (Σy_n) telles que $y_n \sim x_n$, alors les deux séries sont de même nature.

Théorème 2.1.5 On ne modifie pas la nature ni la somme d'une série à termes positifs en effectuant des permutations et des regroupements arbitraires sur les termes.

2.2 Comparaison séries-intégrales

Remarquons que

$$\sum_{n_0+1}^N f(n) \leq \int_{n_0}^N f(x) dx \leq \sum_{n_0}^{N-1} f(n)$$

Proposition 2.2.1 Soit f une fonction positive décroissante sur $[n_0, \infty[$. La série $(\Sigma f(n))$ converge si et seulement si $\int_{n_0}^A f(x) dx$ a une limite quand $A \uparrow \infty$. Cette limite est notée $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$. Dans le cas contraire on écrit $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx = \infty$.

Corollaire 2.2.2 Soit f une fonction positive décroissante sur $[n_0, \infty[$.

1. Si $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx < \infty$, alors on a l'équivalent quand $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{N+1}^{\infty} f(n) \sim \int_N^{\infty} f(x) dx$$

2. Si $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx = \infty$, alors on a l'équivalent quand $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{n_0}^N f(n) \sim \int_{n_0}^N f(x)dx$$

Séries de Riemann La série de terme général $n^{-\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Séries de Bertrand La série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$$

converge si et seulement si $\beta > 1$.

2.3 Critères de convergence

Proposition 2.3.1 (Critère de Riemann) Soit $u_n > 0$ le terme général d'une série.

1. S'il existe $\alpha > 1$ et $l \geq 0$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow l$, alors la série converge.
2. S'il existe $\alpha < 1$ et $l \in]0, \infty$ tel que $u_n \sim ln^{-\alpha}$, alors la série diverge.

Proposition 2.3.2 (Critère de Cauchy) Soit $u_n > 0$ le terme général d'une série tel que $u_n^{-1/n}$ ait une limite l quand $n \rightarrow \infty$.

1. Si $l < 1$, la série la série converge.
2. Si $l > 1$, la série diverge.

Proposition 2.3.3 (Critère de d'Alembert) Soit $u_n > 0$ le terme général d'une série tel que u_{n+1}/u_n ait une limite l quand $n \rightarrow \infty$.

1. Si $l < 1$, la série la série converge.
2. Si $l > 1$, la série diverge.

Exemples

$$u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \quad , \quad v_n = \frac{\ln n}{n^2} \quad , \quad w_n = \sin^3 \frac{1}{n} \quad , \quad x_n = \frac{n^3}{n!} \quad , \quad y_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$$

Intégrales Généralisées

3.1 Intégrale généralisée sur un intervalle borné non fermé

Définition 3.1.1 Soit f une fonction définie sur $[a, b[$, intégrable sur tout intervalle $[a, b - \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad \text{existe}$$

l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est dite convergente et on note

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Remarquons que si $f(x)$ a une limite (finie) quand $x \rightarrow b$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est convergente. Exemple $\int_0^1 x \ln x dx$ est convergente.

Exemple fondamental: Soit f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

Une primitive de f est

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 1 \\ F(x) &= -\ln(b-x) \quad \text{si } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = F(b-\varepsilon) - F(a) = -\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

si $\alpha \neq 1$ et $F(b-\varepsilon) - F(a) = -\ln \varepsilon + \ln(b-a)$ si $\alpha = 1$, on voit que cette intégrale a une limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ si et seulement si $\alpha < 1$.

3.1.1 Intégrale généralisée de fonctions positives

Théorème 3.1.2 Soit f définie et positive sur $[a, b[$ intégrable sur tout intervalle $[a, b - \varepsilon]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est convergente si et seulement si la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$.

Théorème 3.1.3 Soit f et g définies et positives sur $[a, b[$, intégrable sur tout $[a, b - \varepsilon]$ et telles que pour tout $x \in [a, b[$ on a $f(x) \leq g(x)$. Alors :

1. a) Si $\int_a^b g(x) dx$ converge, $\int_a^b f(x) dx$ converge.
2. b) Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge, $\int_a^b g(x) dx$ diverge.

• **Applications**: Soit f positive sur $[a, b[$, intégrable sur tout $[a, b - \varepsilon]$. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{\alpha \rightarrow b} (\varepsilon)^r f(b - \varepsilon) = l$. Alors:

- si $r < 1$, alors $\int_a^b f(x) dx$ converge,
- si $r \geq 1$ et $l \neq 0$, $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

Théorème 3.1.4 Soit f et g deux fonctions positives équivalentes à gauche de b . Alors les deux intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont de même nature.

• **Exercice** Etudier la convergence des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{1+x^2}} dx, \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$$

3.1.2 Convergence absolue

Théorème 3.1.5 Soit f une fonction définie sur $[a, b[$, intégrable sur tout intervalle $[a, b - \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$. Si $\int_a^b |f(x)| dx$ converge, alors $\int_a^b f(x) dx$ converge.

L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est dite alors absolument convergente. En résumé : une intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

3.2 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Définition 3.2.1 Soit f définie sur $[a, +\infty[$ et intégrable sur tout intervalle $[a, A]$ pour $A > a$. Si $\int_a^A f(x) dx$ a une limite quand $A \rightarrow +\infty$, on dit que $\int_a^\infty f(x) dx$ est convergente.

Exemple fondamental: Soit $a > 0$ et f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Une primitive de f est

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 1 \\ F(x) &= \ln x \quad \text{si } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_a^A f(x) dx = F(A) - F(a) = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

si $\alpha \neq 1$ et $F(A) - F(a) = \ln \frac{A}{a}$, on voit que cette intégrale a une limite quand $A \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3.2.1 Intégrale généralisée de fonctions positives

Théorème 3.2.2 Soit f définie et positive sur $[a, +\infty[$ intégrable sur tout intervalle $[a, A]$, alors l'intégrale $\int_a^\infty f(x) dx$ est convergente si et seulement si la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

Equations différentielles

3.1 Equations différentielles du premier ordre

Soit $\mathbb{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle numérique du premier ordre une équation du type:

$$y' = f(x, y) \quad (3.1.6)$$

où y représente une fonction de la variable x et y' sa dérivée.

Résoudre l'équation différentielle (3.1.6) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est équivalent à chercher toutes les fonctions

$$y : I \mapsto \mathbb{R}$$

dérivables et telles que pour tout $x \in I$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Exemples

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et

$$y' = f(x) \quad (3.1.7)$$

Alors

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est l'unique solution de (3.1.7) définie sur I telle que $y(x_0) = y_0$.

2. Soit

$$y' = 3y^{2/3} \quad (3.1.8)$$

Alors $y_1(x) = 0$ et $y_2(x) = x^3$ sont deux solutions de (3.2.13), définies sur $\mathbb{R}$ telles que $y(0) = 0$.

3. Soit

$$y' = \frac{x}{1-x^2} y + \frac{x}{1-x^2} \quad (3.1.9)$$

Nous verrons que cette équation admet pour solution générale sur tout intervalle ne contenant pas 1 et -1

$$y(x) = -1 + \frac{\lambda}{\sqrt{|1-x^2|}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$y(x) = -1$ est la seule solution définie sur $\mathbb{R}$.

Interprétation géométrique A l'équation différentielle (3.1.6), on associe le champ de vecteurs

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

d'origine (x, y) . Une solution de l'équation (3.1.6), appelée courbe intégrale, est alors une courbe dont la tangente en chacun de ses points (x, y) admet pour vecteur directeur $v(x, y)$.

Problème de Cauchy Etant donnés un intervalle I de $\mathbb{R}$ et un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ appelé conditions initiales, le problème de Cauchy consiste en la recherche d'une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vérifiant:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \quad \forall x \in I \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Définition 3.1.1 Une fonction de I dans $\mathbb{R}$ est dite lipschitzienne en y dans $I \times \mathbb{R}$ si il existe une constante K telle que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Cette condition est vérifiée lorsque f admet une dérivée partielle par rapport à y continue et bornée sur $I \times \mathbb{R}$. Il suffit alors de choisir

$$K = \sup_{(x,y) \in I \times \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$$

Théorème 3.1.2 (Cauchy-Lipschitz) Si $f : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue et lipschitzienne en la deuxième variable, alors le problème de Cauchy admet une solution unique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times \mathbb{R}$.

Ce théorème donne donc une condition suffisante d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. Cependant il s'agit d'une solution locale; il est en pratique important de connaître le plus grand intervalle J pour lequel la conclusion du théorème soit vraie.

Une solution du problème de Cauchy définie sur un intervalle J est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement à un intervalle contenant strictement J .

On montre que sous les conditions du Théorème 3.1.2, la solution maximale est unique.

Dans l'exemple 3, les solutions maximales différentes de $y(x) = 1$ sont définies soit sur $] - \infty, -1[$ soit sur $] -1, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$

Dans l'exemple 2, $f(x, y) = 3y^{2/3}$ n'est pas lipschitzienne en y au voisinage de $(x_0, 0)$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. La droite $y = 0$ courbe intégrale particulière intersecte toutes les courbes intégrales. La solution du problème de Cauchy avec les conditions initiales $(y(x_0) = 0)$ n'est pas unique.

Deux courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper qu'en un point où les conditions du théorème 1 ne sont pas remplies.

3.1.1 Equations à variables séparées

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, g ne s'annulant pas sur J .

L'équation différentielle

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

est appelée équation différentielle à variables séparées. Le problème de Cauchy associé avec les conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ admet pour solution la fonction $y(x)$ définie implicitement sur un sous intervalle de I par:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{y_0}^y g(t) dt.$$

La démonstration consiste à appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{y_0}^y g(t) dt.$$

Exemples

1. $y'(x) = f(x)$ où f est continue sur I .
2. $y'(x) = h(y)$, avec h continue sur J ne s'annulant pas. En posant $g = 1/h$, le théorème précédent donne:

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{dt}{h(t)}.$$

La fonction

$$F : y \mapsto \int_{y_0}^y \frac{dt}{h(t)}$$

est dérivable sur J et sa dérivée est de signe constant sur J . La réciproque F^{-1} est donc une bijection dérivable de $F(J) \rightarrow J$. Le problème de Cauchy admet donc l'unique solution

$$y = F^{-1}(x - x_0)$$

définie sur $x_0 + F(J)$.

Intégration d'une équation homogène

Soit f une fonction continue sur I . L'équation différentielle

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

est appelée équation homogène. En posant $t(x) = y/x$ on obtient l'équation à variables séparées:

$$xt' = f(t) - t.$$

Les courbes intégrales obtenues sont alors définies par des équations paramétriques.

- Exercice: Intégrer l'équation différentielle:

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

3.1.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Soit a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. L'équation différentielle

$$a(x) y' + b(x) y = c(x) \tag{3.1.10}$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Justification de la terminologie Soit $D : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ définie par:

$$D(y) = a(x) y' + b(x) y.$$

D est une application linéaire. Par conséquent toute solution de (3.1.10) est la somme d'une solution particulière et d'une fonction appartenant au noyau de D .

$$y \in \text{Ker} D \Leftrightarrow a(x) y' + b(x) y = 0.$$

On dit que y est alors solution de l'équation homogène associée à (3.1.10).

Intégration de (3.1.10). Théorème de Cauchy On suppose que $a(x) \neq 0, \forall x \in I$. (3.1.10) peut donc s'écrire:

$$y'(x) + \alpha(x) y = \beta(x)$$

a) Intégration de l'équation homogène:

$$y'(x) + \alpha(x)y = 0 \quad (3.1.11)$$

La fonction α étant continue sur I , elle admet une primitive A définie sur I . En multipliant (3.1.11) par $e^{A(x)}$, on obtient:

$$y'e^{A(x)} + \alpha(x)y(x)e^{A(x)} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dx}\left\{e^{A(x)}y(x)\right\} = 0$$

ce qui entraîne $y(x) = Ce^{-A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$. On en déduit donc:

1. $\text{Ker} D$ est de dimension 1: L'ensemble des solutions de (3.1.11) est un sous espace vectoriel, de dimension 1, de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy, (3.1.11) associé aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ admet une solution unique. La démonstration précédente montre que la solution maximale est au moins définie sur le plus grand intervalle contenant x_0 sur lequel α est continue.
3. Si une solution y s'annule en $x_0 \in I$, alors $y(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple fondamental : $y' + ky = 0$.

• Exemples où a s'annule sur I

1) $xy' = y$

Sur $] -\infty, 0[$, la solution générale s'écrit $y(x) = C_1 x$. Sur $]0, +\infty[$, la solution générale s'écrit $y(x) = C_2 x$. Cependant, en choisissant $C_1 = C_2$, on obtient des solutions définies sur $\mathbb{R}$.

2) $x^2 y' = y$ Sur $] -\infty, 0[$, la solution générale s'écrit $y(x) = C_1 e^{-1/x}$. Sur $]0, +\infty[$, la solution générale s'écrit $y(x) = C_2 e^{-1/x}$. Il est impossible de construire des solutions définies sur $\mathbb{R}$, autres que la fonction nulle.

3) $y' \sin x = y$ Les solutions sur $\mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\pi$ sont $y = C \tan x/2$.

b) Intégration de l'équation avec second membre:

$$y'(x) + \alpha(x)y = \beta(x) \quad (3.1.12)$$

On a déjà remarqué que la solution générale de (3.1.12) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de (3.1.11). Lorsqu'il n'y a pas de solution particulière évidente, on utilise la méthode de la variation de la constante.

Méthode de la variation de la constante

Soit y_p une solution particulière, y_h une solution de (3.1.11). Posons $y_p(x) = z(x)y_h(x)$. En reportant y_p dans (3.1.12) et en utilisant la relation

$$y'_h(x) + \alpha(x)y_h(x) = 0,$$

on obtient:

$$z'(x) = \beta(x)$$

d'où une solution particulière

$$y_p(x) = \Lambda(x)y_h(x), \quad \Lambda \text{ étant une primitive de } \beta.$$

La solution générale de E_L s'écrit donc

$$y(x) = (C + \Lambda(x))e^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}.$$

• Théorème de Cauchy Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy, (3.1.12) associé à la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Alors $y_1 - y_2$ est une solution de (3.1.11) qui s'annule en x_0 et est donc identiquement nulle sur I . Ce qui prouve le théorème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Exercice : Intégrer

$$y' = \frac{x}{1-x^2} y + \frac{x}{1-x^2}$$

Déterminer la courbe intégrale passant par l'origine.

On remarque que $y = -1$ est solution. Il suffit donc d'intégrer l'équation homogène. Sur un intervalle ne contenant pas ± 1 on a donc

$$y' = \frac{xy}{1-x^2} \quad , \quad \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1-x^2}$$

et en intégrant

$$\log |y| = -\frac{1}{2} \ln |1-x^2| + C_1$$

ou encore

$$|y| = \frac{C_2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = \frac{C_2}{\sqrt{1-x^2}}$$

par continuité en 0. Finalement on obtient la solution générale

$$y = -1 + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

et $y = -1$ est la seule solution définie sur tout $\mathbb{R}$.

3.2 Equations différentielles linéaires du second ordre

Définition 3.2.1 Soit a, b, c, d trois fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. L'équation différentielle

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (3.2.13)$$

est appelée équation différentielle du second ordre.

Soit $D_2 : \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ définie par:

$$D_2(y)(x) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$$

Proposition 3.2.2 1. D_2 est une application linéaire. Son noyau est l'ensemble des solutions de l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \quad (3.2.14)$$

dite équation homogène associée à (3.2.13).

2. Soit y_p une solution particulière de (3.2.13). Toute solution de (3.2.13) est la somme de y_p et d'un élément de $\text{Ker} D_2$.

Théorème 3.2.3 On suppose que a ne s'annule pas sur I . Soit $x_0 \in I, y_0$ et $y'_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy, (3.2.13) associé aux conditions initiales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ admet une solution unique.

3.2.1 Etude de l'équation sans second membre (dite homogène)

Nous allons montrer que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 2.

En algèbre linéaire, on a vu que deux vecteurs v et w sont linéairement dépendants s'il existe des constantes (non toutes les deux nulles) c_1 et c_2 telles que $c_1v + c_2w = 0$. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, deux éléments f et g sont linéairement dépendants s'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que $c_1f + c_2g = 0$, c'est-à-dire si $c_1f(x) + c_2g(x) = 0$ pour tout x .

Exemples

1) Les fonctions $f(x) = 2\sin^2 x$ et $g(x) = 1 - \cos^2 x$ sont linéairement dépendantes puisque $f - 2g = 0$.

2) Montrons par l'absurde que les fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sont linéairement indépendantes. Supposons qu'il existe des constantes (non toutes les deux nulles) c_1 et c_2 telles que $c_1f + c_2g = 0$, c'est-à-dire $c_1x + c_2x^2 \equiv 0$. En faisant successivement $x = 1$ et $x = 2$ on trouve le système

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 4c_2 &= 0 \end{aligned}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues. Le déterminant est non nul ($= 2$), donc la seule solution est $c_1 = c_2 = 0$, d'où la contradiction.

Dans ce dernier exemple, on a choisi deux points arbitraires. Voici un moyen général pour savoir si deux fonctions sont ou non indépendantes.

Définition 3.2.4 On appelle Wronskien de deux fonctions continument différentiables f et g

$$W(f, g) := \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

Théorème 3.2.5 Soient f et g sont deux fonctions continument dérivables sur I .

1. Si f et g sont linéairement dépendantes, alors $W(f, g) = 0$ sur I .
2. Si le $W(f, g)$ est non nul en un point x_0 de I , alors f et g sont linéairement indépendantes.

Exemple :

Montrons que $f(x) = x$ et $g(x) = e^{2x}$ sont linéairement indépendantes. On calcule $W(f, g)(x) = (2x - 1)e^{2x}$. En $x = 0$, il vaut $-1 \neq 0$, donc f et g sont indépendantes.

Preuve: Si, pour tout $x \in I$

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$$

on a, en prenant les dérivées

$$c_1 f'(x) + c_2 g'(x) = 0$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues. Le déterminant est le Wronskien. S'il est nul en un point, seule la solution triviale ($c_1 = 0, c_2 = 0$) existe, donc f et g sont indépendantes.

Théorème 3.2.6 (Abel) Soient y_1 et y_2 deux solutions de

$$D_2(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

Le Wronskien est donné par

$$W(y_1, y_2)(x) = k \exp - \int \frac{b(x)}{a(x)} dx \quad (3.2.15)$$

avec k constante.

Preuve: On vérifie en développant les déterminants que:

$$\frac{d}{dx} W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

puis en exprimant les dérivées secondes à l'aide de (3.2.14) on obtient

$$\frac{d}{dx} W(y_1, y_2) = -\frac{b(x)}{a(x)} W(y_1, y_2).$$

C'est une équation à variables séparées, dont la solution générale est précisément (3.2.15). ■

Théorème 3.2.7 1. Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation homogène (3.2.14). Alors ou bien $W(y_1, y_2)$ est nul pour tout $x \in I$ ou bien il n'est jamais nul.

2. L'ensemble des solutions de l'équation (3.2.14) est un espace vectoriel de dimension 2.

Preuve: Le 1) résulte du théorème 3.2.6.

2) Soit $x_0 \in I$. Si on se donne $y_0 \neq 0$ et deux réels $u \neq \tilde{v}$, le théorème 3.2.3 fournit une solution y_1 au problème de Cauchy avec conditions initiales (x_0, y_0, u) et une solution y_2 au problème de Cauchy avec conditions initiales (x_0, y_0, v) . On a $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Montrons qu'il existe une solution y_p de (3.2.14) de la forme $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$ vérifiant les conditions initiales $y_0 = y_p(x_0)$ et $y'_0 = y'_p(x_0)$. En effet, puisque $W(y_1, y_2)$ n'est jamais nul sur I , le système

$$\begin{aligned} \lambda y_1(x_0) + \mu y_2(x_0) &= y_0 \\ \lambda y_1'(x_0) + \mu y_2'(x_0) &= y'_0 \end{aligned}$$

admet une solution unique. Le théorème de Cauchy nous assure que c'est la seule.

Intégration de l'équation homogène: cas des coefficients constants L'équation (3.2.14) s'écrit

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0 \quad (3.2.16)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On cherche des solutions de la forme $y = e^{rx}$. En substituant, on obtient une équation, dite caractéristique

$$r^2 + \alpha r + \beta = 0. \quad (3.2.17)$$

Deux racines réelles r_1 et r_2 La solution générale de (3.2.16) est alors

$$y_H = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}.$$

Une racine double r La fonction $y_1 = Ce^{rx}$ est solution. Faisons varier la constante, i.e. posons $y = zy_1$ et cherchons z de sorte que y soit solution. On remplace et on obtient:

$$\frac{z''}{z'} = -\alpha - 2r = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en $u = z'$. On obtient successivement

$$\begin{aligned} z' &= C_1 \\ z &= C_1 x + C_2 \\ y &= C_1 x e^{rx} + C_2 e^{rx}. \end{aligned}$$

Deux racines complexes conjuguées $p \pm iq$ On peut remarquer que $y_1 = e^{px} \sin qx$ et $y_2 = e^{px} \cos qx$ sont solutions, soit directement, soit en utilisant les exponentielles complexes. On a donc la solution générale:

$$y = e^{px}(\lambda \cos qx + \mu \sin qx).$$

• Dans le cas général, on part aussi d'une solution et on fait varier la constante. Soit y_1 une solution de (3.2.18)

$$y'' + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = 0, \quad (3.2.18)$$

qui ne s'annule pas sur I . On pose $y = zy_1$ et on cherche z de sorte que y soit solution. On remplace et on obtient:

$$\frac{z''}{z'} = -\alpha(x) - \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} \quad (3.2.19)$$

qui est une équation à variables séparées du premier ordre en $u = z'$. Soit U une primitive de u . On vérifie que $W(\Lambda y_1, y_1) \neq 0$. On a donc obtenu un système fondamental de solutions de (3.2.14).

3.2.2 Equation avec second membre

On sait que la solution est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

A partir d'une solution particulière y_p de l'équation complète on fait varier la constante en cherchant la solution générale sous la forme $y = zy_p$. On retombe sur l'équation (3.2.19) en z .

Variation des constantes Soit

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma(x) \quad (3.2.20)$$

et soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène. On recherche une solution particulière sous la forme

$$y(x) = \lambda(x)y_1(x) + \mu(x)y_2(x)$$

avec la condition

$$\lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) = 0. \quad (3.2.21)$$

En substituant y dans (3.2.20) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) &= 0 \\ \lambda'(x)y_1'(x) + \mu'(x)y_2'(x) &= \gamma(x). \end{aligned}$$

Ce système en λ', μ' a pour déterminant $W(y_1, y_2) \neq 0$ admet donc une unique solution. Il suffit ensuite d'intégrer.

Seconds membres particuliers Si le second membre est de la forme $P_n(x)e^{\omega x}$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et P_n un polynôme de degré n , on peut alors éviter la variation des constantes.

- Si ω n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme

$$y_p = Q_n(x)e^{\omega x}$$

avec Q_n polynôme de degré n . On trouve les coefficients de Q_n par identification.

- Si ω est racine simple, il existe une solution particulière sous la forme

$$y_p = Q_{n+1}(x)e^{\omega x}$$

avec Q_{n+1} polynôme de degré $n+1$.

- Si ω est racine double, il existe une solution particulière sous la forme

$$y_p = Q_{n+2}(x)e^{\omega x}$$

avec Q_{n+2} polynôme de degré $n+2$.

Exemple: On considère l'équation

$$y'' + 2y' + y = 2x^2 \sinh x.$$

Pour l'équation caractéristique, on a $r = -1$ comme racine double. Par ailleurs $\sinh$ est combinaison linéaire de e^x et e^{-x} . On va donc étudier deux équations auxiliaires:

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^x \quad (3.2.22)$$

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}. \quad (3.2.23)$$

Une solution particulière de (3.2.22) est de la forme $Q_2(x)e^x$ et une solution de (3.2.23) est de la forme $Q_4(x)e^{-x}$. L'équation (3.2.22) donne

$$Q_2'' + 4Q_2' + 4Q_2 = x^2$$

Posant $Q_2(x) = ax^2 + bx + c$ on obtient

$$4ax^2 + (8a + 4b)x + (2a + 4b + 4c) \equiv x^2$$

soit $a = 1/4, b = -1/2, c = 3/8$. L'équation (3.2.23) donne

$$Q_4'' = x^2$$

soit $Q_4 = x^4/12$.

3.3 Systèmes différentiels linéaires du Premier Ordre

Définition 3.3.1 Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $X(t)$ un vecteur continûment différentiable de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Le système linéaire à coefficients sans second membre est

$$X'(t) = AX(t) \quad (3.3.24)$$

Résoudre ce système, c'est trouver tous les vecteurs z qui le vérifient.

3.3.1 Cas où A est diagonalisable

On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres et $(u_1, \dots, u_n)$ les vecteurs propres associés.

Théorème 3.3.2 L'ensemble des solutions de (3.3.24) est un espace vectoriel de dimension n et

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} u_n. \quad (3.3.25)$$

Si de plus on fixe la condition initiale $X(0) = X_0$, alors la solution est unique.

Preuve: On appelle P la matrice de passage $P = [U_1, \dots, U_n]$, de sorte que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$. On pose $Y = P^{-1}X$, i.e. $X = PY$, d'où (la dérivation étant linéaire), $X' = PY'$ d'où $PY' = APY$ et finalement

$$Y' = P^{-1}APY = DY$$

ou encore, coordonnée par coordonnée:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ &\dots \quad \dots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t). \end{aligned}$$

qui se résout en

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ &\dots \quad \dots \\ y_n(t) &= \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Enfin, $X = PY$ donne (3.3.25).

3.3.2 Cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Comme A est réelle, les v.p. complexes non réelles sont deux à deux conjuguées et pour un tel couple $(\lambda, \bar{\lambda})$ on peut prendre deux vecteurs propres conjugués $(U, \bar{U})$. Montrons que

$$\text{Vect}\{e^{\lambda t}U, e^{\bar{\lambda}t}\bar{U}\} = \text{Vect}\{\Re(e^{\lambda t}U), \Im(e^{\lambda t}U)\}.$$

En effet, on a:

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}U &= \Re(e^{\lambda t}U) + i\Im(e^{\lambda t}U) \\ e^{\bar{\lambda}t}\bar{U} &= \Re(e^{\bar{\lambda}t}\bar{U}) + i\Im(e^{\bar{\lambda}t}\bar{U}) \end{aligned}$$

et dans l'autre sens,

$$\begin{aligned}\Re(e^{\lambda t}U) &= \frac{e^{\lambda t}U + e^{\bar{\lambda}t}\bar{U}}{2} \\ \Im(e^{\lambda t}U) &= \frac{e^{\lambda t}U - e^{\bar{\lambda}t}\bar{U}}{2i}.\end{aligned}$$

Comme $e^{\lambda t}U$ et $e^{\bar{\lambda}t}\bar{U}$ sont solutions de (3.3.24) (à valeurs complexes) formant un système libre (sur $\mathbb{C}$), $\Re(e^{\lambda t}U)$ et $\Im(e^{\lambda t}U)$ sont solutions de (3.3.24) (à valeurs réelles) formant un système libre (sur $\mathbb{R}$).

Exemple: Soit le système

$$\begin{aligned}x' &= x + y \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z.\end{aligned}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 1).$$

Les v.p. sont $2, 1 + i, 1 - i$. On peut prendre comme vecteurs propres:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $u_3 = \bar{u}_2$ et

$$\begin{aligned}\Re(e^{\lambda_2 t}u_2) &= \begin{pmatrix} \Re(ie^{(1+i)t}) \\ \Re(-e^{(1+i)t}) \\ \Re(e^{(1+i)t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ -e^t \cos t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} \\ \Im(e^{\lambda_2 t}u_2) &= \begin{pmatrix} \Im(ie^{(1+i)t}) \\ \Im(-e^{(1+i)t}) \\ \Im(e^{(1+i)t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ -e^t \sin t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

3.3.3 Cas où A est triangulaire et non diagonalisable

On a $A = PTP^{-1}$ où T est triangulaire supérieure. On pose $X = PY$, i.e. $T = P^{-1}X$ et on obtient $Y' = TY$ qui se résout en cascade. Traitons un exemple de matrice triangulaire.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= 3y_2 + y_3 \\ y_3 &= 3y_3\end{aligned}$$

On part de la i.e. $y_3 = \lambda e^{3t}$ puis on résout la seconde par variation de la constante: $y_2 = K e^{3t}$ d'où $K' = \lambda$ et $K = \lambda t + \mu$ ou encore $y_2 = (\lambda t + \mu) e^{3t}$. Finalement on résout la première classiquement: $y_1 = \xi e^{2t}$.

3.3.4 Cas d'un système avec second membre

Il suffit de trouver une solution particulière qui s'ajoute à la solution générale du système sans second membre. Supposons que pour le système $X' = AX + B$ on n'en connaisse pas et que A soit diagonalisable. On pose $X = PY$ et le système devient: $(PY)' = APY + B$ d'où $Y' = P^{-1}APY + P^{-1}B = DY + P^{-1}B$. Toutes les équations sont alors indépendantes.

Quand la dimension est petite et le vecteur second membre assez simple, comme un polynôme par une exponentielle, il suffit, pour chaque variable, de chercher une solution particulière correspondant à un second membre combinaison linéaire de toutes les composantes du vecteur second membre. Dans le cas d'un polynôme par une exponentielle, les racines de l'équation caractéristique du paragraphe sur les équations de second ordre sont remplacées par les valeurs propres.

Compléments

4.1 Séries à termes quelconques

On dit qu'une série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles est une suite convergente. Si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, on dit que la série (u_n) est absolument convergente.

Théorème 4.1.1 *Une série absolument convergente est convergente.*

Preuve: On remarque que $|u_n + \dots + u_{n+p}| \leq |u_n| + \dots + |u_{n+p}|$ et on applique le critère de Cauchy. ■

Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente. Un exemple est donné dans le théorème suivant.

Une série alternée est une série dont les termes sont réels et alternativement positifs ou nuls et négatifs ou nuls.

Théorème 4.1.2 *Une série alternée de terme général $u_n = (-1)^n x_n$ avec $x_n \downarrow 0$ est convergente. Sa somme $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ vérifie*

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}.$$

De plus le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et vérifie

$$|R_n| \leq x_{n+1}.$$

Preuve: Soit $A_n = S_{2n}$ et $B_n = S_{2n+1}$. Montrons que les suites sont adjacentes.

- On remarque que $A_{n+1} - A_n = x_{2n+2} - x_{2n+1} \leq 0$ donc A_n est décroissante.
- On remarque que $B_{n+1} - B_n = x_{2n+2} - x_{2n+3} \geq 0$ donc B_n est croissante.
- On remarque que $A_n - B_n = x_{2n+1} \downarrow 0$.

Les suites A_n et B_n ont donc une limite commune S . De plus pour tous p et q on a $A_p \geq S \geq B_q$ donc $R_{2n} = S - A_n$ vérifie $0 > R_{2n} > B_n - A_n = -x_{2n+1}$; de même $R_{2n+1} = S - B_n$ vérifie $0 < R_{2n+1} < A_{n+1} - B_n = x_{2n+2}$. ■

Exemple Soit $a \in]0, 1[$. La série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$$

n'est pas absolument convergente mais elle est convergente.

Ce résultat est un cas particulier de la règle d'Abel.

Théorème 4.1.3 *Soit une série de terme général $u_n = \alpha_n x_n$, où $\alpha_n \in \mathbb{C}$ et $x_n > 0$ vérifient*

1. Il existe $A > 0$ tel que pour tous $n \geq 1$ et $p \geq 0$

$$|\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}| \leq A$$

2. $x_n \downarrow 0$

Alors la série (u_n) converge.

Preuve: On utilise la transformation d'Abel pour montrer que S_n est une suite de Cauchy. On pose $\sigma_0 = 0$ et $\sigma_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et on écrit

$$S_{N+p} - S_N = \sum_{n=N+1}^{N+p} (\sigma_n - \sigma_{n-1})x_n = \sigma_{N+p}x_{N+p} - \sigma_N x_{N+1} + \sum_{n=N+1}^{N+p-1} \sigma_n(x_n - x_{n+1})$$

d'où

$$|S_{N+p} - S_N| \leq Ax_{N+p} + Ax_{N+1} + A \sum_{n=N+1}^{N+p-1} (x_n - x_{n+1}) = 2Ax_{N+1}.$$

L'application du critère de Cauchy est alors directe. ■

Exemple : $u_n = \frac{e^{i\theta}}{n}$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. En effet on a

$$|e^{i(n+1)\theta} + \dots + e^{i(n+p)\theta}| = |e^{i\theta} + \dots + e^{ip\theta}| = \left| \frac{1 - e^{ip\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

Remarque Attention à l'usage des équivalents. dans le cas de séries à terme quelconques, le raisonnement est erroné. Exemple: les termes généraux

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

sont équivalents puisque

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

On sait que la série (v_n) est convergente. Si la série (u_n) était convergente, alors la série $(u_n - v_n)$ le serait, ce qui est absurde puisque $(1/n)$ est divergente. Donc (u_n) est divergente.

4.2 Intégrales semi-convergentes

Rappel : Si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge alors $\int_a^\infty f(x)dx$ converge aussi. On dit alors qu'elle est absolument convergente.

Si $\int_a^\infty f(x)dx$ sans que $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge on dit qu'elle est semi-convergente.

Théorème 4.2.1 (Règle d'Abel) Soit $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, décroissante et tendant vers 0 à l'infini. Soit g localement intégrable sur $[a, \infty[$. S'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq a$

$$\left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq A$$

alors l'intégrale $\int_a^\infty f(t)g(t)dt$ est convergente.

Preuve: On va donner une preuve dans le cas particulier où g est continue et f est dérivable. On pose $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Cette fonction est alors dérivable. On va appliquer le critère de Cauchy en effectuant une IPP. Soient $b \geq a$ et $c > 0$:

$$\int_b^{b+c} f(x)g(x)dx = \int_b^{b+c} f(x)G'(x)dx = [f(x)G(x)]_b^{b+c} - \int_b^{b+c} G(x)f'(x)dx$$

On a $|[f(x)G(x)]_b^{b+c}| \leq Af(b+c) + Af(b)$. De plus comme $-f'(x) \geq 0$ on a

$$\left| - \int_b^{b+c} G(x)f'(x)dx \right| \leq A \int_b^{b+c} (-f'(x))dx = Af(b) - Af(b+c)$$

Finalement,

$$\int_b^{b+c} f(x)g(x) dx \leq 2Af(b)$$

ce qui permet d'appliquer Cauchy. ■

Exemple :

L'intégrale

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

est convergente, mais on peut montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.